

## MATEMATIKA 2

### Lekcija 8- Diferencijalne jednačine

**Osnovni pojmovi.** Jednačina u kojoj se pojavljuje nepoznata funkcija, zajedno sa svojim izvodima, kao i nezavisno promenljive, naziva se diferencijalna jednačina. Ako je reč o nepoznatoj funkciji jedne nezavisno promenljive, govorimo o običnoj diferencijalnoj jednačini.

Red obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji učestvuje u njoj. Opšti oblik diferencijalne jednačine  $n$ -tog reda je

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

gde je  $\Phi$  neka realna funkcija od  $n + 2$  nezavisno promenljive. Diferencijalne jednačine

$$y' = 5x \quad \text{i} \quad y' + 7y = 0$$

su prvog reda, a diferencijalne jednačine

$$x^2 y'' + 20xy' + 4y = 6x^{10} \ln x \quad \text{i} \quad y^{10} y'' = (y')^2$$

su drugog reda.

Ako nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promenljivih, tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju parcijalni izvodi, i imamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

Postupak određivanja nepoznate funkcije iz date diferencijalne jednačine naziva se rešavanje te jednačine ili integraljenje te jednačine. Ustvari, rešenje diferencijalne jednačine je funkcija koja, zamenjena u tu jednačinu, pretvara ovu u identitet.

Diferencijalna jednačina, u opštem slučaju, ima više od jednog rešenja. Ako postoji relacija koja sadrži sva rešenja date diferencijalne jednačine, njom je definisano opšte rešenje posmatrane jednačine.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) je funkcija

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (2)$$

koja za fiksirane vrednosti  $C_1, C_2, \dots, C_n$  zadovoljava jednačinu (1) kao funkcija od  $x$ . Pritom se  $C_1, C_2, \dots, C_n$  nazivaju proizvoljnim konstantama. Opšte rešenje (2) može da se zada i implicitno, jednačinom oblika  $f(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ .

Ako je jednačinom

$$f(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (3)$$

zadata jedna familija (skup) krivih u  $xy$ -ravni, moguće je formirati običnu diferencijalnu jednačinu reda  $n$ , koja za opšte rešenje ima tu familiju. Postupak je sledeći. Uzastopno diferenciramo po  $x$  jednačinu (3)  $n$ -puta, smatrajući pritom  $y$  funkcijom od  $x$ . Tako (zajedno sa jednačinom (3)) dobijamo  $n + 1$ -nu jednačinu sa  $n$  parametara  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Eliminacijom tih parametara iz spomenutih  $n + 1$  jednačina, dobijamo jednu diferencijalnu jednačinu reda  $n$ , koja se naziva diferencijalnom jednačinom familije krivih (3).

**Primer.** Formirajmo diferencijalnu jednačinu familije krivih:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (*)$$

Diferenciranjem dva puta date jednačine dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \cos x - C_2 \sin x \\ y'' &= -C_1 \sin x - C_2 \cos x. \end{aligned}$$

Iz jednačine (\*) i dveju dobijenih diferenciranjem, eliminišimo konstante  $C_1$  i  $C_2$ . Rezultat te eliminacije je tražena diferencijalna jednačina. U ovom slučaju eliminaciju možemo izvršiti tako što ćemo sabrati jednačinu (\*) sa poslednjom jednačinom. Tako dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu

$$y'' + y = 0.$$

### Diferencijalne jednačine prvog reda

U ovoj lekciji rešavaćemo nekoliko tipova običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, tj. jednačina oblika  $\Phi(x, y, y') = 0$ .

**Razdvojene promenljive.** Diferencijalna jednačina

$$y' = P(x) Q(y) \quad (4)$$

naziva se diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivima. Jednačina (4) može se napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = P(x) Q(y),$$

odakle izlazi

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx.$$

Prema tome, sva rešenja jednačine (4) sadržana su u formuli

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C \quad (5)$$

gde je  $C$  proizvoljna konstanta.

**Homogene diferencijalne jednačine prvog reda.** Diferencijalna jednačina

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

naziva se homogena diferencijalna jednačina prvog reda. Ako je  $f(u) = u$ , onda jednačina glasi  $y' = \frac{y}{x}$  i u njoj su promenljive razdvojene. Pretpostavimo stoga da je  $f(u) \neq u$ . Uvedimo smenu

$$y = ux, \quad (7)$$

gde je  $u$  nova nepoznata funkcija. Iz (7) izlazi

$$y' = u + xu',$$

te jednačina (6) postaje

$$u + xu' = f(u),$$

$$\text{tj. } x \frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

$$\text{ili } \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

a to je jednačina u kojoj su promenljive razdvojene. Posle integraljenja nalazimo opšte rešenje homogene jednačine (6):

$$\ln |x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C, \quad (8)$$

gde je  $C$  proizvoljna konstanta.

**Linearne diferencijalne jednačine prvog reda.** Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (9)$$

gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  date funkcije, naziva se linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Pretpostavimo da je rešenje jednačine (9) oblika

$$y = uv, \quad (10)$$

gde su  $u$  i  $v$  zasad neodređene funkcije. Iz (10) izlazi  $y' = u'v + uv'$  te jednačina (9) postaje

$$\begin{aligned} u'v + uv' + p(x)uv &= q(x), \\ \text{tj., } [u' + p(x)u]v + uv' &= q(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Izaberimo funkciju  $u$  tako da bude

$$u' + p(x)u = 0. \quad (12)$$

Jednačina (12) je jednačina sa razdvojenim promenljivima:

$$\frac{du}{u} + p(x)dx = 0.$$

Posle integraljenja te jednačine dobijamo

$$u = Ae^{-\int p(x)dx},$$

gde je  $A$  proizvoljna konstanta. Uzevši  $A = 1$ , imamo

$$u = e^{-\int p(x)dx}. \quad (13)$$

Ako je  $u$  funkcija (13), jednačina (11) ima oblik

$$e^{-\int p(x)dx}v' = q(x),$$

odakle, posle integraljenja, izlazi

$$v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx, \quad (14)$$

gde je  $C$  proizvoljna konstanta. Iz (10), (13) i (14) nalazimo opšte rešenje jednačine (9):

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \right). \quad (15)$$

**Bernulijeve diferencijalne jednačine.** Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)y = q(x)y^k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (16)$$

naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ako je  $k = 0$ , jednačina (16) je linearna, a ako je  $k = 1$ , ona razdvaja promenljive. Stoga ćemo pretpostaviti da je  $k \neq 0$  i  $k \neq 1$ . Uvedimo smenu  $y = u^m$ , gde je  $u$

nova nepoznata funkcija, a  $m$  je konstanta koju treba odrediti. Imamo  $y' = mu^{m-1}u'$ , te jednačina (16) postaje

$$mu^{m-1}u' + p(x)u^m = q(x)u^{mk},$$

$$\text{tj., } u' + \frac{1}{m}p(x)u = \frac{1}{m}q(x)u^{mk-m+1}. \quad (17)$$

Izaberimo  $m$  tako da bude

$$mk - m + 1 = 0,$$

tj. stavimo  $m = \frac{1}{1-k}$ . Na taj način dobijamo rezultat: Bernulijeva diferencijalna jednačina (16) svodi se pomoću smene

$$y = u^{\frac{1}{1-k}}$$

na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' + (1-k)p(x)u = (1-k)q(x).$$

Kako je ova jednačina linearna, ona se može rešiti primenom formule (15). Na taj način se dobija

$$y^{1-k} = (1-k)e^{-(1-k)\int p(x)dx} \left( C + \int q(x)e^{(1-k)\int p(x)dx} dx \right).$$

Ovo je formula za rešavanje Bernulijeve jednačine (16).